تعریف

اگر F تایعی ثابت و مقدارش برابر ۱ باشد. آنگاه مجموعهایی به صورت تشکیل می شوند وقتی هر سه به صفر میل کنند خانه کوچکتر و بیشتر می شوند و در نهایت فضای D را می پوشانند بنابراین حجم D را به صورت انتگرال سه گانه زیر تعریف می کنیم.

توسط این فرمول ما قادر خواهیم بود حجم اجسام محصور در رویه های خمیده را محاسبه کنیم.

محاسبه انتگرال های سه گانه

برای محاسبه انترگال سه گانه به ندرت از تنعریف مستقیم آن به صورت یک حد استفاده می کنیم. بلکه صورت سه بعدی قضیه فوبینی را به کار می بریمن و با استفاده از انتگرال گیری یگانه مکرر ، انترگال سه گانه را محاسبه می کنیم.

تقسیم فوبینی

اگر بر ناحیه مستطیلی پیوسته باشد ، داریم:

مثلا فرض کنید ناحیه ای چون D دارزیم که از پایین به رویه از بالا به رویه و از طرف به استوانه C که موازی محور Z است محدود می باشد و می خواهیم از تابع پیوسته ای چون انتگرال بگیریم. فرض می کنیم R تصویر قائم D روی صفحهع xy باشد. R ناحیه ای در صفحه xy است که C آن را محصور کرده است. همان طور که می دانیم ، در محاسبه یک انترگال دو گانه گاه (ونه همیشه) دو ترتیب برای انجام انتگرال گیری های یگانه وجود دارد در مورد انتگرال های سه گانه هم گاه (و نه همیشه) شش ترتیب برای انتگرال گیری وجود دارد که از هر شش ترتیب می توان برای محاسبه انتگرال استفاده کرد.

برای تعیین حدود Z انتگرال گیری در هر مورد خاصی ، می توان از روشی که در مورد انتگرال های دو گانه به کار می رود استفاده کرد. فرض می کنیم خطی چون L از نقطه ای چون (x,y) در R می گذرد و با محور Z موازی است. وقتی Z افزایش می یابد اسن خط در وارد D می شود و در از آن خارج می شود. به این ترتیب حد بالا و پایین انتگرال گیری نسبت به Z به دست می آید. حال نتیجه این انتگرال گیری تابعی است از تنها دو متغیر y,x که با تعیین حدود آن به روش معمول ، از آن روی R انتگرال می گیریم. و در نهایت جواب این انتگرال های سه گانه حجم ناحیه دلخواه را برای ما بدست می دهد.

محاسبه حجم به روش برش دادن

در وهله اول حججم استوانه ای را که مساحت قاعده آن A و ارتفاعش h اسشت به صورت Ah می کنیم. این تعریف تعمیمی است از فرمول (ارتفاع*مساحت قاعده= حجم) در هندسه فضایی در مورد استوانه های مستدیر به استوانمه هایی با قاعده های دلخواه. اکگنون فرض کنید جسم به صفحاتی محدود است که در

b,a بر محور x ها عمودند و شکلش بین این دو صفحه تغییر می کند بدیهی است که این جسم حجمی دارد اما چگونه دراین حجم را محاسبه کنیم و یا حتی آن را تعریف کنیم؟

فرض می کنیم جسم را صفحاتی عمود بر محور x قطع کنند و به صورت برش های نازک به ضخامت در آورند به این ترتیب V، حجم جسم برابر با مجموع حجم های این برش هاست. اما چگونه می توانم حجم یک برش آورد؟ هر طور که ر ا تعریف کنیم شع میل داریم که این جسم حداقل برابر باشد ، یعنی برابر حجم استوانه ای که قاعده آن سطح مقطعی از برش با کمترین مساحت است. همچنین میل داریم از بزرگتر نباشد. که این مقدار برابر حجم استوانه ای است که قاعده سطح مقطع از برش ، با بیشترین مساحت است. بنابراین V را هر طور که تعریف کنیم می خواهیم مقداری داشته باشد که بهع ازای هر تقسیم بندی بازه در نابرابری صدق کند. این شرط دقیقا به ما می گوید که v چه مقداری باید داشته باشد. بنابر قضیه وجود انتگرال وقتی که به سمت صفر میل کند. مجموع های طرف چپ و راست عبارت بالا به سوی انتگرال از a تا b میل می کنند بنابراین اگر بخواهیم v به ازای هر تقسیم بندی بازه د در عبارت بالا صدق کند باید آن را چنین تعریف کنیم:

حجم جسمی که مساحت سطح مقطع آن A(x) است از x=a تا xc=b چنینی به دست می آید:

برای استفاده از این تعریف مادام که انتگرال وجود دارد لازم نیست که A(x) پیوسته باشد. مراحل لازم عملی لازم برای محاسبه حجم اجسام به کمک تساوی فوق عبارتند از:

مرحله ۱: شکل جسم و یک سطح مقطع نمونه آن را می کشیم.

مرحله ۲: A(x) را می یابیم.

مرحله: حدود انتگرال گیری را معین می کنیم.

مرحله ۴: انتگرال می گیریم.

حجم اجسام دورانی

جسمی که از دوران ناحیه ای سطح حول محوری واقع در صفحه آن به وجود می آید جسم دورانی نام دارد. اگر این ناحیه ناحیه ای بین نمودار و محور x باشد و محور دوران همان محور x باشد ع مقطع هایی از جسم که بر محور x عمودند بهع صورت قرص اند. A(x) مساحت یک قرص نمونه ، برابر مجدور شسعاع آن است چون شعاع در x برابر با f(x) است داریم:

و بالاخره حجم اجسام دورانی (دوران حول محور x) توسط انتگرال زیر بدست می اید.

محاسبه حجم به کمک واشرها

در این رو.سش ابتدا ناحیه ای را که قرار است دوران کند با نوارهای مستطیل باریکی می پوشانیم سپس حجم شکل های حاصل از دوران این نوارها را حجم می کنیم. اگر نوارها بر محور دوران عمود باشند. شکل های حاصل از دوران به شکل واپرند. اگر نوارها با محور دوران موازی باشند ، اشکال حاصل از دوران به شکل پوسته های استوانه ای اند. در هر دو حالت مجموع حجم های اجسام حاصل از دوران نوارها مجموع ریمانی متناظر با انتگرالی است که مقفدار آن برابر حجم جسم دورانی است.

فرمول محاسبه حجم به کمک واشرها

محاسبه حجم به کمک پوسته های استوانه ای

اگر نوارهای مستطیلی تقریب زنده ناحیه ای که حول یک محور دوران می کند با آن محور موازی باشند. اجسام به شکل پوسته های استوانه ای خواهند بود. گاه کار کردن با پوسته ای آسانتر از کار کردن با واشرهاست زیرا فرلمول مربوط به آنها شامل جملات توان دوم نمی شود.