

حد و مشتق

در ریاضیات، یک تابع رابطه‌ای است که هر متغیر دریافتی خود را به فقط یک خروجی نسبت می‌دهد. علامت استاندارد خروجی یک تابع f به همراه ورودی آن، x می‌باشد یعنی $f(x)$. به مجموعه ورودی‌هایی که یک تابع می‌تواند داشته باشد دامنه و به مجموعه خروجی‌هایی که تابع می‌دهد برد می‌گویند.

برای مثال عبارت $f(x) = x^2$ نشان دهنده یک تابع است، که در آن f مقدار x را دریافت می‌کند و x^2 را می‌دهد. در این صورت برای ورودی ۳ مقدار ۹ به دست می‌آید. برای مثال، برای یک مقدار تعریف شده در تابع f می‌توانیم بنویسیم، $f(4) = 16$.

معمولاً در تمارین ریاضی برای معرفی کردن یک تابع از کلمه f استفاده می‌کنیم و در پاراگراف بعد تعریف تابع یعنی $f(x) = 2x+1$ را می‌نویسم و سپس $f(4) = 9$. وقتی که نامی برای تابع نیاز نباشد اغلب از عبارت $y=x^2$ استفاده می‌شود.

وقتی که یک تابع را تعریف می‌کنیم، می‌توانیم خودمان نامی به آن بدهیم، برای مثال:

یکی از خواص تابع این است که برای هر مقدار باید یک جواب وجود داشته باشد، برای مثال عبارت:

یک تابع نمی‌باشد، زیرا ممکن است برای یک مقدار دو جواب وجود داشته باشد. جذر عدد ۹ برابر ۳ است و در این رابطه اعداد $3+$ و $3-$ به دست می‌آیند. برای ساختن یک تابع ریشه دوم، باید فقط یک جواب برای آن وجود داشته باشد، یعنی:

که برای هر متغیر غیرمنفی یک جواب غیرمنفی وجود دارد.

در یک تابع لزومی ندارد که حتماً بر روی عدد علمياتی انجام گیرد. یک مثال که نشان می‌دهد که عملیاتی بر روی عدد انجام نمی‌شود، تابعی است که پایتخت یک کشور را معین می‌کند. مثلاً $\text{Capital(France)} = \text{Paris}$.

حال کمی دقیق‌تر می‌شویم اما هنوز از مثال‌های خودمانی استفاده می‌کنیم. A و B دو مجموعه هستند. یک تابع از A به B با به هم پیوستن مقادیر منحصر به فرد درون A معین می‌شود و مجموعه B به دست می‌آید. به مجموعه A دامنه تابع می‌گویند؛ مجموعه B هم تمام مقادیری را که تابع می‌تواند داشته باشد شامل می‌شود.

در بیشتر زمینه‌های ریاضی، اصطلاحات تبدیل و نگاشت معمولاً با تابع هم معنی پنداشته می‌شوند. در هر حال ممکن است که در بعضی زمینه‌های خصوصیات دیگری داشته باشند. برای مثال در هندسه، یک نگاشت گاهی اوقات یک تابع پیوسته تعریف می‌شود.

تعاریف ریاضی یک تابع

یک تابع f یک رابطه دوتایی است، به طوری که برای هر x یک و فقط یک y وجود داشته باشد تا x را به y رابطه دهد. مقدار تعریف شده و منحصر به فرد y با عبارت $f(x)$ نشان داده می‌شود.

به دلیل اینکه دو تعریف برای رابطه دوتایی استفاده می‌شود، ما هم از دوتعریف برای تابع استفاده می‌کنیم.

تعریف اول

ساده تعریف رابطه دوتایی عبارتست از: «یک رابطه دوتایی یک زوج مرتب می‌باشد». در این تعریف اگر رابطه دوتایی دلالت بر «کوچکتر از» داشته باشد آن گاه شامل زوج مرتب‌هایی مانند $(2, 5)$ است، چون 2 از 5 کوچکتر است.

یک تابع مجموعه‌ای از زوج مرتب‌ها است به طوری که اگر (a, b) و (a, c) عضوی از این مجموعه باشند آن گاه b با c برابر باشد. در این صورت تابع مجذور شامل زوج $(3, 9)$ است. رابطه جذر یک تابع نمی‌باشد زیرا این رابطه شامل زوج‌های $(9, 3)$ و $(3, -9)$ است و در این صورت 3 با -3 برابر نیست.

دامنه تابع مجموعه مقادیر x یعنی مختص‌های اول زوج‌های رابطه مورد نظر است. اگر x در دامنه تابع نباشد آن گاه $f(x)$ هم تعریف نشده‌است.

برد تابع مجموعه مقادیر y یعنی مختص‌های دوم زوج‌های رابطه مورد نظر است.

تعریف دوم

بعضی از نویسندگان نیاز به تعریفی دارند که فقط از زوج‌های مرتب استفاده نکند بلکه از دامنه و برد در تعریف استفاده شود. این گونه نویسندگان به جای تعریف زوج مرتب از سه‌تایی مرتب (X, Y, G) استفاده می‌کنند، که در آن X و Y مجموعه هستند (که به آنها دامنه و برد رابطه می‌گوییم) و G هم زیرمجموعه‌ای از حاصل ضرب دکارتی X و Y است (که به آن گراف رابطه می‌گویند). در این صورت تابع رابطه دوتایی است که در آن مقادیر x فقط یک بار در اولین مختص مقادیر G اتفاق می‌افتد. در این تعریف تابع دارای برد منحصر به فرد است؛ این خاصیت در تعریف نخست وجود نداشت.

شکل تعریف تابع بستگی به مبحث مورد نظر دارد، برای مثال تعریف یک تابع پوشا بدون مشخص کردن برد آن امکان‌ناپذیر است.

پیشینه تابع

«تابع»، به عنوان تعریفی در ریاضیات، توسط گاتفرید لایبنیز در سال ۱۶۹۴، با هدف توصیف یک کمیت در رابطه با یک منحنی به وجود آمد، مانند شیب یک نمودار در یک نقطه خاص. امروزه به توابعی که توسط لایبنیز تعریف شدند، توابع مشتق‌پذیر می‌گوییم، اغلب افراد این توابع در هنگام آموختن ریاضی با این گونه توابع برمی‌خورند. در این گونه توابع افراد می‌توانند در مورد حد و مشتق صحبت کنند. چنین توابعی پایه حسابان را می‌سازند.

واژه تابع بعدها توسط لئونارد اویلر در قرن هجدهم، برای توصیف یک عبارت یا فرمول شامل متغیرهای گوناگون مورد استفاده قرار گرفت، مانند $f(x) = \sin(x) + x^3$.

در طی قرن نوزدهم، ریاضی‌دانان شروع به فرموله کردن تمام شاخه‌های ریاضی کردند. ویرسترس بیشتر خواهان به وجود آمدن حسابان در علم حساب بود تا در هندسه، یعنی بیشتر طرفدار تعریف اویلر بود.

در ابتدا، ایده تابع ترجیحاً محدود شد. برای ژوزف فوریه مدعی بود که تمام توابع از سری فوریه پیروی می‌کنند در حالی که امروزه هیچ ریاضی‌دانی این مطلب را قبول ندارد. با گسترش تعریف توابع، ریاضی‌دانان توانستند به مطالعه «عجایب» در ریاضی بپردازند از جمله این که یک تابع پیوسته در هیچ مکان گسستگی نیست. این توابع در ابتدا بیان نظریه‌هایی از روی کنجکاوی فرض می‌شد و آنها از این توابع برای خود یک «غول» ساخته بودند و این امر تا قرن بیستم ادامه داشت.

تا انتهای قرن نوزدهم ریاضی‌دانان سعی کردند که مباحث ریاضی را با استفاده از نظریه مجموعه فرموله کنند و آنها در هر موضوع ریاضی به دنبال تعریفی بودند که از مجموعه استفاده کند. دیریکله و لوباچوسکی هر یک به طور مستقل و تصادفاً هم زمان تعریف «رسمی» از تابع دادند.

در این تعریف، یک تابع حالت خاصی از یک رابطه است که در آن برای هر مقدار اولیه یک مقدار ثانویه منحصر به فرد وجود دارد.

تعریف تابع در علم رایانه، به عنوان حالت خاصی از یک رابطه، به طور گسترده‌تر در منطق و علم تئوری رایانه مطالعه می‌شود.

توابع مورد استفاده در اکثر علوم کمی می‌باشند، برای مثال در فیزیک، هنگامی که می‌خواهیم رابطه بین چند متغیر را بیان کنیم، مخصوصاً در زمانی که مقدار یک متغیر کاملاً وابسته به متغیر دیگر است. برای مثال وقتی که می‌خواهیم نشان دهیم که تغییر دمای آب چه تاثیری بر روی چگالی آن می‌گذارد.

توابع را همچنین مورد استفاده در علم رایانه برای مدل سازی ساختمان داده ها و تاثیرات الگوریتم می بینیم. این کلمه در رویه ها و زیرروال ها بسیار دیده می شود.

به یک مقدار ورودی مشخص در یک تابع، آرگومان تابع می گویند. برای هر آرگومان x ، مقدار منحصر به فرد y در مجموعه اعداد برد تابع وجود دارد که با آن مطابقت می کند، و به آن مقدار در x یا تصویر x تحت f می گویند. تصویر x می تواند با $f(x)$ و یا y نشان داده شود.

گراف تابع f مجموعه تمام زوج مرتب های $(x, f(x))$ به ازای تمام x های درون دامنه X است. اگر X و Y زیرمجموعه هایی از R (اعداد حقیقی) باشند، در این صورت این تعریف مانند شهود «گراف» به عنوان یک تصویر یا نمودار تابع به همراه زوج مرتب های نقاط در محور مختصات است.

مفهوم تصویر را می توان اتصال مجموعه ای از نقاط تصویر به هم دانست. اگر A زیرمجموعه ای دامنه باشد، آن گاه $f(A)$ هم زیرمجموعه ای از برد است که شامل تمام تصویرهای های مقادیر A می شود. در این صورت می گوییم که $f(A)$ تصویر A تحت f است.

به یاد داشته باشید که برد f همان تصویر $f(X)$ در مقادیر دامنه است و برد f زیرمجموعه ای از مجموعه تمام مقادیر ممکن برای f است.

وارون (یا معکوس) مجموعه B که مجموعه مقایر ممکن برای Y تحت تابع f است زیرمجموعه ای از دامنه X است که به این صورت تعریف می شود:

$$\{f^{-1}(B) = \{x \text{ in } X \mid f(x) \text{ is in } B\}$$

برای مثال، وارون مجموعه $\{4, 9\}$ تحت تابع مربع مجموعه $\{-3, -2, 2, 3\}$ است.

به طور کلی، وارون یک نقطه منحصر به فرد (نقطه ای که فقط یک مقدار برای آن وجود داشته باشد)، می تواند مجموعه تمام اعداد را دربرگیرد. برای مثال اگر $f(x) = 7$ باشد، آن گاه وارون $\{5\}$ تهی است اما وارون $\{7\}$ برابر مقادیر دامنه آن است. در این صورت وارون یک مقدار در برد زیرمجموعه ای از دامنه آن است. طبق قرارداد وارون یک مقدار یعنی $f^{-1}(b)$ و یا همان $\{f^{-1}(b)\}$ به صورت زیر است:

$$\{f^{-1}(b) = \{x \text{ in } X \mid f(x) = b\}$$

مهمترین توابع عبارتند از:

تابع یک به یک، که در آن این خاصیت وجود دارد که اگر $f(a) = f(b)$ باشد آن گاه a هم باید با b برابر باشد.

تابع پوشا، که در آن این خاصیت وجود دارد که برای هر y در برد، یک مقدار x در دامنه وجود داشته باشد
یعنی $f(x) = y$.

توابعی که هم یک‌به‌یک و هم پوشا هستند.

اگر از تعریف اول تابع که در بالا گفته شد استفاده شود، تا موقعی که برد تعریف نشده باشد، «یک‌به‌یک» بودن تابع باید وضعیتی مانند پوشا بودن را داشته باشد. می‌توان از ترکیب دو یا چند تابع به عنوان یک تابع استفاده کرد. برای مثال، $f(x) = \sin(x^2)$ ترکیب یک تابع سینوسی و یک تابع درجه دو است. توابع $f: X \rightarrow Y$ و $g: Y \rightarrow Z$ می‌توانند با هم ترکیب شوند، به طوری که ابتدا این عمل بر روی تابع f انجام شود و y به $f(x)$ دست آید و یک بار هم بر روی g اعمال شود و $z = g(y)$ به دست آید. تابع مرکب g و f به صورت زیر نوشته می‌شود:

ابتدا تابع سمت راست عملیات را انجام می‌دهد و سپس تابع سمت چپ (برعکس زبان انگلیسی) و این تابع را «جی‌اُف» می‌خوانیم.

در تعریفی غیرعلمی، تابع وارون f تابعی است که اثر تابع f را خنثی کند، به این صورت که هر مقدار $f(x)$ را به آرگومان x نسبت دهد. تابع مربع (درجه دو) وارون تابع غیرمنفی جذر (ریشه دوم) است، به طوری که اگر f دارای دامنه X و برد Y و گراف G باشد، آن گاه وارون آن دارای دامنه Y و برد X و گراف است.

$$\{ G^{-1} = \{ (y, x) : (x, y) \in G \}$$

برای مثال اگر گراف f برابر $G = \{(1,5), (2,4), (3,5)\}$ باشد، آن گاه گراف f^{-1} برابر $G^{-1} = \{(5,1), (4,2), (5,3)\}$ می‌شود.

رابطه f^{-1} یک تابع است اگر و تنها اگر برای هر y در برد فقط یک آرگومان x مانند $f(x) = y$ وجود داشته باشد، به عبارت دیگر، وارون تابع f یک تابع است اگر و تنها اگر f پوشا و یک‌به‌یک باشد. در این مثال، برای هر x درون X $f^{-1}(f(x)) = x$ و برای هر y درون Y $f(f^{-1}(y)) = y$ است. گاهی اوقات می‌توان یک تابع را تغییر داد و این کار اغلب با جایگذاری دامنه‌ای جدید که زیرمجموعه‌ای از دامنه قبلی باشد صورت می‌گیرد، و همین‌طور باید تغییرات را در برد و گراف اعمال کرد که در این صورت تابع تغییر داده شده دارای وارونی است که خود یک تابع است.

برای مثال وارون تابع $y = \sin(x)$ ، یعنی $f(x) = \arcsin(x)$ ، به صورت $y = \arcsin(x)$ تعریف می‌شود اگر و تنها اگر $x = \sin(y)$ باشد، و این یک تابع نیست زیرا گراف آن شامل دو زوج مرتب $(0, 0)$ و $(\pi, 0)$ است. اما اگر دامنه $y = \sin(x)$ را به $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ تغییر دهیم، برای برد داریم $-1 \leq y \leq 1$ و در این صورت وارون تابع مورد نظر یک تابع است، و برای بیان آن از A در حرف اول آن استفاده می‌کنیم، یعنی $f(x) = \text{Arcsin}(x)$.

اما این روش برای همه توابع عملی نیست، زیرا در بعضی موارد پیدا کردن وارون توابع غیرممکن است.

اگر دامنه X تعریف شده باشد، تابع f را می‌توان با جدول‌بندی کردن آرگومان‌های x و جواب آنها در $f(x)$ تعریف کرد.

چیزی که برای تعریف کردن تابع رایج‌تر است استفاده از فرمول و به طور کلی استفاده از الگوریتم است، که در آن نشان داده می‌شود چه عملیاتی باید بر روی x های دامنه انجام گیرد تا $f(x)$ به دست آید. برای تعریف یک تابع می‌توان از عمل ریاضی که با آرگومان x رابطه‌ای داشته باشد استفاده کرد. البته راه‌های زیاد دیگری برای تعریف یک تابع وجود دارد؛ از جمله استفاده از روش بازگشتی، استفاده از بسط‌های تجزیه و عبارات جبری، حدها، دنباله‌ها، سری‌ها و استفاده از معادلات دیفرانسیل.

در ریاضیات توابع زیادی وجود دارد که نمی‌توانند مفهوم خود را به طور دقیق برسانند. یکی از نتایج اصلی نظریه شمارش این است که توابع زیادی وجود دارند که تعریف می‌شوند اما قابل محاسبه نیستند.

معمولاً پرانتزهای کنار آرگومان را هنگامی که برای آن ابهامی وجود ندارد حذف می‌کنند، مانند: $\sin x$. در برخی موارد علمی، از علامت نشان‌گذاری لهستانی معکوس استفاده می‌شود، که با این کار باید پرانتزها را حذف کرد؛ و برای مثال تابع فاکتوریل همواره به صورت $n!$ نوشته می‌شود، در حالی که اکثر افراد تابع گاما را به صورت $\Gamma(n)$ می‌نویسند.

برای نشان دادن یک تابع ابتدا نام آن را می‌آوریم، سپس دامنه، بعد برد و در انتها هم ضابطه تابع را می‌نویسیم. با استفاده از این روش اغلب تابع به دو قسمت نشان داده می‌شود، مانند:

در اینجا دامنه تابع با نام « f » اعداد طبیعی و برد آن اعداد حقیقی است، و n را به خودش تقسیم بر π تبدیل می‌کند. (در بعضی موارد نام تابع را به همراه دونقطه، در بالای پیکان می‌آورند). روش نشان دادن دیگری هم وجود دارد که رایج‌تر اما غیرعلمی‌تر است، در این روش تابع به شکل کوتاه شده زیر نشان داده می‌شود:

در این روش اطلاعات کمتری ارائه شده‌است و ما از دامنه و برد تابع خبر نداریم، و در این صورت به جای n می‌توانیم هر عددی از قبیل اعداد گنگ هم قرار دهیم.

بعضی از نویسندگان به جای استفاده از $f(A)$ از $f[A]$ استفاده می‌کنند و این کار برای رفع ابهام میان دریافت مفاهیم است، بعضی دیگر هم از $f^{\backslash}x$ به جای $f(x)$ ، و $f^{\backslash}A$ به جای $f[A]$ استفاده می‌کنند.

توابع دو (یا چند) متغیره

مفهوم تابع را می‌توان با ترکیب دو یا چند آرگومان بیان کرد. این مفهوم شهودی، زمانی می‌تواند تعریف شود که دامنه تابع حاصل ضرب دکارتی دو یا چند مجموعه باشد.

برای مثال، عملیات را بر روی تابع ضربی که از دو عدد صحیح برای به دست آوردن حاصل استفاده می‌کند انجام می‌دهیم: $f(x, y) = x \cdot y$. تابع می‌تواند دامنه $Z \times Z$ ، مجموعه تمام زوج‌ها به عنوان برد Z ، و برای گراف، مجموعه تمام زوج‌های $((x, y), x \cdot y)$ را داشته باشد. به یاد داشته باشید که مولفه اول چنین زوج‌هایی یک زوج از اعداد صحیح است، در حالی که مولفه دوم تنها یک عدد صحیح است.

مقدار تابع زوج (x, y) برابر است با $f(x, y)$. اگر چه معمولاً یک جفت از پرانتزها را حذف می‌کنند و آن را به شکل $f(x, y)$ نشان می‌دهند، یعنی یک تابع دومتغیره شامل x و y .

توابعی که حاصلشان یک مجموعه ضرب است

در این گونه توابع، مقدار تابع شامل چند متغیر است. برای مثال، تابع $\text{mirror}(x, y) = (y, x)$ را با دامنه $R \times R$ و برد $R \times R$ در نظر بگیرید. زوج (y, x) یکی از مقادیر برد تابع که یک مجموعه است، می‌باشد.

عملیات دوتایی

منظور از عملیات دوتایی ساده در ریاضی همان جمع و ضرب است، وقتی که در توابع استفاده شوند مقادیر را از $Z \times Z$ به Z می‌برند. این موضوع در جبر شرح داده می‌شود و در آنجا از توابع n تایی برای انجام عملیات استفاده می‌شود.

چیزی که از گذشته مورد استفاده قرار می‌گرفته این است که از عملیات جمع و ضرب به عنوان نشانه‌های میان‌وندی استفاده شود: $x+y$ و $x \times y$ به جای $(x, y) +$ و $(x, y) \times$.

مجموعه توابع

مجموعه یک تابع از یک مجموعه X به یک مجموعه Y به صورت $X \rightarrow Y$ یا $[X \rightarrow Y]$ یا Y^X نشان داده می‌شود. آخرین عبارت یاد شده با استفاده از قضیه بدیهی $|Y^X| = |Y|^{|X|}$ اثبات می‌شود. جزئیات بیشتر در اعداد اصلی بیان شده است.

معمولاً از عبارت $f: X \rightarrow Y$ برای بیان $f \in [X \rightarrow Y]$ استفاده می‌شود، و « f تابعی از X به Y است» خوانده می‌شود. بعضی افراد هم آن را « $f: X \rightarrow Y$ » می‌نویسند.

آیا یک تابع بیشتر از گرافش است؟

بعضی از ریاضی‌دانان از یک رابطه دوتایی (از اینجا به بعد آن را تابع می‌گوییم) به عنوان سه‌تایی مرتب (X, Y, G) استفاده می‌کنند، که در آن X و Y مجموعه دامنه و برد، و G گراف f است. اگر چه، سایر ریاضی‌دانان رابطه‌ای را تعریف می‌کنند که فقط شامل زوج‌های مجموعه G باشد، بدون این که دامنه‌ای برای آن تعیین کرده باشند.

در هر تعریف خوبی‌ها و بدی‌هایی وجود دارد، اما هر یک از آنها تعاریف مناسبی هستند که مورد استفاده در ریاضی قرار می‌گیرند. دامنه و برد موضوع مهمی است و باید به طور واضح مشخص باشند.

توابع ناقص و توابع چندتایی

وضعیت یک رابطه دوتایی f از X به Y را می‌توان به دو صورت تقسیم نمود:

f تابع جمعی: برای هر x در X ، چند y در Y وجود دارد به طوری که x با y در رابطه باشد.

f تابع تک-مقداری باشد: برای هر x در X ، حداقل یک y در Y وجود دارد به طوری که x با y در رابطه باشد.

در بعضی موارد که تابع وضعیت اول را دارد اما لزوماً از وضعیت دوم پیروی نمی‌کند، می‌توان تابع را تابع چندارزشی خواند؛ و رابطه‌ای که وضعیت دوم را دارد اما لزوماً از وضعیت اول پیروی نمی‌کند را می‌توان تابع ناقص خواند.

سایر توابع

توابع مختلفی وجود دارند که دارای خواصی هستند که در مباحث گوناگون ریاضی دارای اهمیت خاصی هستند. فهرستی از این توابع عبارتند از:

پیوسته، مشتق‌پذیر، انتگرال‌پذیر

خطی، چندجمله‌ای، گویا

همگرا، یکنواخت، تک‌نما

مثلثاتی

جبری

غیر جبری

منحنی

زوج، فرد

وکتور

بسطها و محدودیت‌ها

در یک تعریف خودمانی، منظور از محدودیت یک تابع f ، تغییر دامنه‌اش است.

اگر بخواهیم کمی دقیق‌تر نگاه کنیم، اگر f تابعی از X به Y باشد و S زیرمجموعه‌ای از X ، محدودیت f به S تابع $f|_S$ از S به Y می‌باشد و در این صورت می‌نویسیم برای هر s در S داریم $(f|_S)(s) = f(s)$.

اگر g محدودیتی از f باشد، در این صورت می‌نویسیم f بسطی از g است.

انجام عملیات در یک نقطه

اگر $f: X \rightarrow R$ و $g: X \rightarrow R$ توابعی با دامنه X و برد R باشد، آن گاه می‌توان جمع دو تابع را به این صورت تعریف کرد: $f + g: X \rightarrow R$ و توابع ضرب را هم به صورت $f \times g: X \rightarrow R$ و در نتیجه:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad (f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$$

برای هر x در X .

توابع شمارا و غیرشمارا

تعداد کمی توابع شمارا از اعداد صحیح به اعداد صحیح وجود دارد، اما تعداد توابع از اعداد صحیح به اعداد صحیح به اندازه تعداد اعداد حقیقی است. این نشان می‌دهد که توابع از اعداد صحیح به اعداد صحیح وجود دارد که خاصیت شمارا ندارند.

کمیتی که علاوه بر اندازه دارای جهت نیز باشد. مهم‌ترین کمیت‌های برداری که می‌توان نام برد عبارت‌اند از:

۱- مکان ۲- سرعت ۳- شتاب ۴- نیرو ۵- میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی

یکی از بهترین راه‌های تشخیص برداری بودن یا نبودن یک کمیت اینست که بررسی کنیم آیا جمع آن کمیت خاصیت برداری دارد یا خیر. مثلاً جریان الکتریکی با وجود آنکه علاوه بر اندازه جهت نیز دارد ولی برداری نیست زیرا جمع جریان‌ها به صورت اسکالر صورت می‌گیرد (قانون جریان کیرشهف).

در حالت بسیار کلی هر مجموعه عدد که به صورت یک ماتریس ستونی $\mathbf{1n}^*$ قابل نوشتن باشد بردار گفته می‌شود. کاربرد این مفهوم در توصیف حالت سیستم‌ها به مراتب بیشتر از محاسبات پدیده‌های فیزیکی است.

مشتق یکی از دو مفهوم اصلی حسابان است که مقدار تغییرات لحظه‌ای تابع را نشان می‌دهد..

تاریخچه

مشتق از مسائل مهم ریاضی است که موضع آن نیوتن و لایپ نیتز بودند و حد مقدمه آن است. نیوتن سرعت لحظه‌ای را به کمک قوانین حدگیری و لایپ نیتز شیب خط مماس بر منحنی‌ها را با استفاده از قوانین حدگیری محاسبه کرد و هر یک در حالت کلی به مشتق رسید.

مشتقات مراتب بالاتر

مشتقات مراتب بالاتر یک تابع از تعریف اصلی مشتق بدست می‌آیند. با مشتق‌گیری دوباره از مشتق یک تابع به مشتق دوم آن می‌رسیم و ...

نحوه‌ی نمایش

مشتقات مراتب بالاتر (مشتق مرتبه دوم، سوم و چهارم) تابع f را می‌توان به دو صورت زیر نمایش داد:

$$f, f' \text{ و } f''$$

$$f(2), f(3) \text{ و } f(4)$$

تابع مشتق‌پذیر در یک نقطه

اگر مشتق تابع f در نقطه‌ای مانند x موجود و معین باشد، گفته می‌شود که تابع f در نقطه‌ی x مشتق‌پذیر است.

تابع مشتق‌پذیر

اگر تابعی در هر نقطه از دامنه‌اش مشتق‌پذیر باشد، تابع مشتق‌پذیر نامیده می‌شود.

شرایط مشتق‌پذیری

برای اینکه تابعی در یک نقطه مانند x مشتق پذیر باشد، باید در یک همسایگی آن تعریف شده باشد و نیز در آن نقطه پیوسته باشد. یا به عبارتی تابع در آن نقطه هموار باشد.