تکنیکهای انتگرال گیری- روش انتگرال گیری جزء به جزء

اگر u و v توابعی از x باشند قاعده مشتق حاصلضرب می گوید

$$\frac{d(uv)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}.$$

با انتگرال گیری از طرفین داریم

$$\int \frac{d(uv)}{dx}\,dx = \int u\frac{dv}{dx}\,dx + \int v\frac{du}{dx}\,dx,$$

$$uv = \int u\,dv + \int v\,du,$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

این **فرمول انتگرال گیری جزء به جزء** است. طرف چپ انتگرالی است که می خواهید آن را محاسبه کنید و در طرف راست دو جزء وجود دارد که یکی نیازی به انتگرال گیری ندارد (uv)و دیگری عبارتست از ($\int v\,du$ **.**)این کار وقتی امکان پذیر است که انتگرال دوم ساده تر از انتگرال اول باشد**.**

در اینجا می خواهیم انتگرال گیری جزء به جزء توسط جدول را توضیح دهیم. این کار آسان تر از محاسبه u- $dv - v - du$خواهد بود. برای آنکه این روش را توضیح دهیم از فرمول زیر شروع می کنیم

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

دوباره انتگرال گیری جزء به جزء را به انتگرال طرف راست به کار ببرید. این بار از $\frac{du}{dx}$ مشتق و از v انتگرال بگیرید

$$v = uv - \left[\left(\frac{du}{dx}\right)\left(\int v\,dx\right) - \int\left(\int v\,dx\right)\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)dx\right] = uv - \left(\frac{du}{dx}\right)\left(\int v\,dx\right) + \int\left(\int v\,dx\right)\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)dx.$$

اگر بازهم انتگرال گیری جزء به جزء را به انتگرال طرف راست به کار ببریم داریم

$$\int u\,dv = uv - \left(\frac{du}{dx}\right)\left(\int v\,dx\right) + \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)\left(\int\left(\int v\,dx\right)dx\right) - \int\left(\int\left(\int v\,dx\right)dx\right)\left(\frac{d^3u}{dx^3}\right)dx.$$

در اینجا یک الگویی وجود دارد که جدول زیر به آسانی آن را نشان می دهد

$$\begin{array}{cccc}
 & \dfrac{d}{dx} & & \displaystyle\int dx \\
+ & u & & dv \\
 & & \searrow & \\
- & \dfrac{du}{dx} & & v \\
 & & \searrow & \\
+ & \dfrac{d^2u}{dx^2} & & \displaystyle\int v\,dx \\
 & & \searrow & \\
- & \dfrac{d^3u}{dx^3} & & \displaystyle\int\left(\int v\,dx\right)dx \\
\vdots & \vdots & & \vdots
\end{array}$$

مثال .انتگرال $\int x^3e^{2x}\,dx$ را محاسبه کنید.

با توجه به عبارتهای x^3 و e^{2x} در زیر انتگرال باید تصمیم بگیریم در عبارت $x^3e^{2x}\,dx$ کدام قسمت را **u**و کدام قسمت را dv انتخاب کنیم.

در اینجا از $u=x^3$ و $dv=e^{2x}\,dx$ استفاده می کنیم. با تشکیل جدول و نوشتن علامتهای متناوب در ستون چپ داریم

$$\begin{array}{cccc}
 & \dfrac{d}{dx} & & \displaystyle\int dx \\
+ & x^3 & & e^{2x} \\
 & & \searrow & \\
- & 3x^2 & & \frac{1}{2}e^{2x} \\
 & & \searrow & \\
+ & 6x & & \frac{1}{4}e^{2x} \\
 & & \searrow & \\
- & 6 & & \frac{1}{8}e^{2x} \\
 & & \searrow & \\
+ & 0 & \rightarrow & \frac{1}{16}e^{2x}
\end{array}$$

مشتقات x^3 در یک ستون و انتگرال های e^{2x} در ستون دیگر قرار دارد. به محض اینکه مشتق در ستون مشتقات صفر شود انتگرال گیری هم متوقف می شود.

بنابرین،

$$\int x^3e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}x^3e^{2x} - \frac{3}{4}x^2e^{2x} + \frac{6}{8}xe^{2x} - \frac{6}{16}e^{2x} + \int 0\,dx.$$

عبارت $\int 0\,dx$ برابر ۰ است و داریم

$$\int x^3e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}x^3e^{2x} - \frac{3}{4}x^2e^{2x} + \frac{6}{8}xe^{2x} - \frac{6}{16}e^{2x} + C.$$

اگر عکس روند بالا عمل می کردیم یعنی x^3را در ستون انتگرال گیری و e^{2x} را در ستون مشتق گیری قرار می دادیم ببینید چه اتفاقی می افتاد

$$\begin{array}{ccccc}
 & \frac{d}{dx} & & \int dx \\
+ & e^{2x} & & x^3 \\
 & & \searrow & \\
- & 2e^{2x} & & \frac{1}{4}x^4 \\
 & & \searrow & \\
+ & 4e^{2x} & & \frac{1}{20}x^5 \\
\vdots & \vdots & & \vdots
\end{array}$$

یعنی وضعیت رفته رفته پیچیده تر و دشوارتر می شد. شاید یک انتخاب دیگر به صورت زیر باشد

$$\begin{array}{cccc}
 & \frac{d}{dx} & & \int dx \\
+ & 1 & & x^3e^{2x} \\
 & & \searrow & \\
- & 0 & & \int x^3e^{2x}\,dx
\end{array}$$

که این کار هم موفقیتی در بر ندارد.

برای انتخاب توابع برای ستون مشتق گیری توصیه می شود اولویت بندی زیر را رعایت کنیم. البته این کار قطعی و خلل ناپذیر نیست و به طور کلی باید شرایط هر مساله را در نظر گرفت.

Logs **I**nverse trigs **P**owers **T**rig **E**xponentials

توابع نمایی - توابع مثلثاتی - توانها - توابع مثلثاتی معکوس - لگاریتمها

یا به طور خلاصه

L-I-P-T-E

برای مثال اگر بخواهید این روش را برای انتگرال

$$\int x(\ln x)^2\,dx.$$

استفاده کنید لگاریتم $(\ln x)^2$ را در ستون مشتق گیری و توان x را در ستون انتگرال گیری قرار می دهیم.

یا انتگرال

$$\int e^{2x}\sin 5x\,dx.$$

را در نظر می گیریم. در اینجا با توجه به الویت بندی بالا تابع $\sin 5x$ در ستون مشتق و تابع e^{2x} در ستون انتگرال قرار می گیرد. توجه کنید که توابع مثلثاتی نسبت به توابع نمایی اولویت دارند تا در ستون مشتق قرار گیرند.

مثال . الف) انتگرال $\int \ln x\,dx$ را محاسبه کنید.

$$\begin{array}{cccc} & \dfrac{d}{dx} & & \int dx \\ + & \ln x & & 1 \\ & & \searrow & \\ - & \dfrac{1}{x} & \rightarrow & x \end{array}$$

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C. \quad \square$$

ب) انتگرال $\int (\ln x)^2\,dx$ را محاسبه کنید

$$\begin{array}{ccccc} & \dfrac{d}{dx} & & \displaystyle\int dx \\ + & (\ln x)^2 & & 1 \\ & & \searrow & \\ - & \dfrac{2\ln x}{x} & \rightarrow & x \end{array}$$

$$\int (\ln x)^2\,dx = x(\ln x)^2 - 2\int \ln x\,dx = x(\ln x)^2 - 2(x\ln x - x) + C.$$

مثال .انتگرال $\int x(x+4)^{50}\,dx$ را محاسبه کنید.

ابتدا انتگرال قسمت توان را با جانشانی محاسبه می کنیم

$$\int (x+4)^{50}\,dx = \int u^{50}\,du = \frac{1}{51}u^{51} + C = \frac{1}{51}(x+4)^{51} + C.$$

$$[u = x+4, \quad du = dx]$$

با همان جانشانی داریم

$$\int (x+4)^{51}\,dx = \frac{1}{52}(x+4)^{52} + C.$$

جدول را تشکیل می دهیم

$$\begin{array}{cccc} & \dfrac{d}{dx} & & \displaystyle\int dx \\ + & x & & (x+4)^{50} \\ & & \searrow & \\ - & 1 & & \dfrac{1}{51}(x+4)^{51} \\ & & \searrow & \\ + & 0 & & \dfrac{1}{2652}(x+4)^{52} \end{array}$$

بنابراین،

$$\int x(x+4)^{50}\,dx = \frac{1}{51}x(x+4)^{51} - \frac{1}{2652}(x+4)^{52} + C.$$

توجه کنید که این انتگرال را می توان با جانشانی $u = x+4$ نیز حل کرد.

مثال .انتگرال $\int \sin^{-1} x\,dx$ را محاسبه کنید.

انتگرال گیری جزء به جزء در مواردی که تابع انتگران یک تابع تک باشد نیز مفید است. در اینجا روش مناسبی نمی توانید برای انتگرال گیری $\sin^{-1} x$ پیدا کنید، بنابراین از انتگرال گیری جزء به جزء استفاده کنید

$$\begin{array}{ccccc} & \dfrac{d}{dx} & & \displaystyle\int dx \\ + & \sin^{-1} x & & 1 \\ & & \searrow & \\ - & \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \rightarrow & x \end{array}$$

بنابراین،

$$\int \sin^{-1} x\,dx = x\sin^{-1} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

انتگرال جدید را می توانیم با جانشانی $u = 1 - x^2$، بنابراین $du = -2x\,dx$ و $dx = \dfrac{du}{-2x}$ محاسبه کنیم

$$x\sin^{-1} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x\sin^{-1} x - \int \frac{x}{\sqrt{u}} \cdot \frac{du}{-2x} = x\sin^{-1} x + \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = x\sin^{-1} x + \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{u} + C =$$

$$x\sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2} + C. \quad \square$$

مثال .انتگرال $\int_0^{\pi/2} x\sin x\,dx$ را محاسبه کنید.

نخست پادمشتق را محاسبه کنید و سپس حدود را قرار دهید

$$
\begin{array}{ccccc}
 & \dfrac{d}{dx} & & \displaystyle\int dx \\
+ & x & & \sin x \\
 & & \searrow & \\
- & 1 & & -\cos x \\
 & & \searrow & \\
+ & 0 & & -\sin x
\end{array}
$$

بنابراین،

$$\int_0^{\pi/2} x\sin x\,dx = [-x\cos x + \sin x]_0^{\pi/2} = 1. \quad \square$$

مثال .انتگرال $\int e^x \sin 2x\,dx$ را محاسبه کنید .

$$
\begin{array}{ccccc}
 & \dfrac{d}{dx} & & \displaystyle\int dx \\
+ & e^x & & \sin 2x \\
 & & \searrow & \\
- & e^x & & -\dfrac{1}{2}\cos 2x \\
 & & \searrow & \\
+ & e^x & & -\dfrac{1}{4}\sin 2x
\end{array}
$$

$$\int e^x \sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}e^x\cos 2x + \frac{1}{4}e^x \sin 2x - \frac{1}{4}\int e^x \sin 2x\,dx.$$

در اینجا بعد از دوبار جزء به جزء به همان انتگرال اول می رسیم. کافی است همانند یک معادله ساده مقدار انتگرال را به عنوان مجهول معادله محاسبه کنیم

$$\frac{5}{4}\int e^x \sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}e^x\cos 2x + \frac{1}{4}e^x\sin 2x,$$

$$\int e^x \sin 2x\,dx = -\frac{2}{5}e^x\cos 2x + \frac{1}{5}e^x\sin 2x + C. \quad \square$$

مثال. انتگرال $\int \frac{x^2}{(1-x)^3}\,dx$ را محاسبه کنید.

$$
\begin{array}{cccc}
 & \dfrac{d}{dx} & & \displaystyle\int dx \\
+ & x^2 & & \dfrac{1}{(1-x)^3} \\
 & & \searrow & \\
- & 2x & & \dfrac{1}{2(1-x)^2} \\
 & & \searrow & \\
+ & 2 & & \dfrac{1}{2(1-x)} \\
 & & \searrow & \\
+ & 0 & & -\dfrac{1}{2}\ln|1-x|
\end{array}
$$

$$\int \frac{x^2}{(1-x)^3}\,dx = \frac{1}{2}\frac{x^2}{(1-x)^2} - \frac{x}{1-x} - \ln|1-x| + C.$$

این انتگرال را با جانشانی $u = 1 - x$ نیز می توانید محاسبه کنید.